

Examen – Traitement d’image

ENSEEIH, Modap TSI

15 mai 2018

- ◇ Les documents distribués en cours et les notes manuscrites sont autorisés. *Tous les autres documents ainsi que la calculatrice (et le portable) sont interdits*
- ◇ Durée : une heure et 45 minutes
- ◇ Les exercices sont indépendants, le barème est indicatif
- ◇ For non-French speakers : you can answer in English, and feel free to ask for help if you do not understand the questions

Exercice 1 – Cours (6 points)

1. Quel est ce masque de convolution, à quoi sert-il?

$$h = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Expliquer pourquoi le filtrage inverse n’est pas une bonne méthode pour déconvoluer une image. Proposer deux moyens simples d’y remédier.
3. Expliquer comment détecter les contours avec un filtre LoG (Laplacian of Gaussian). Quel est le rôle du paramètre d’échelle?
4. Expliquer le principe de l’approximation linéaire et non-linéaire d’une image (ou d’un signal) dans une base.

Exercice 2 – Le TI en Matlab (5 points)

1. Expliquer précisément le fonctionnement du programme Matlab ci-dessous, en commentant chaque étape. I désigne une image de type **double**, en niveaux de gris.

```
1 function g = fun_1(f)
   [n m] = size(f);
3   [x y] = meshgrid(linspace(-1,1,m), linspace(-1,1,n));
   r = x.^2+y.^2;
5   sigma = 5;
   ft = fftshift(fft2(f));
7   vh = r .* exp(-vsigma(k)^2*r);
   g = real(iff2(fftshift(h.*ft)));
```

- Écrire une fonction Matlab qui prend en entrée une image en niveaux de gris, et qui renvoie une image agrandie (interpolée), par zéro-padding dans le domaine de Fourier. Donner un avantage et un inconvénient de cette méthode par rapport à l'interpolation spline (c'est-à-dire polynomiale par morceaux).

Exercice 3 – Déconvolution de Richardson-Lucy (6 points)

On considère le modèle de dégradation suivant : pour tout pixel (n, m) ,

$$u[n, m] \sim \mathcal{P}((u_0 \star h)[n, m]),$$

où u_0 représente la scène (à reconstruire), h est un noyau de convolution connu, et y l'image observée. La différence avec le modèle vu en cours réside dans la nature du bruit, qui est ici Poissonien. On rappelle que si $x \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour tout entier naturel k , on a

$$P(x = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

- Expliquer la provenance du bruit de Poisson dans les images.
- Écrire la vraisemblance $\mathcal{L}(u|u_0)$. On supposera tous les pixels indépendants.
- On souhaite trouver le u_0 qui maximise cette vraisemblance, ou de manière équivalente, son logarithme. Montrer que cela conduit à l'équation suivante : pour tout pixel (k, l) ,

$$\sum_{n, m} \frac{u[n, m] h[k - n, l - m]}{(u_0 \star h)[n, m]} = \sum_{n, m} h[k - n, l - m].$$

- Simplifier l'expression précédente, en faisant l'hypothèse que la réponse impulsionnelle h somme à 1, et que l'on considère la convolution cyclique.

Exercice 4 – Filtres de Gabor (6 points) Le filtre de Gabor est défini dans le domaine continu par la réponse impulsionnelle suivante :

$$h_{\sigma, x_0, \xi_0}(x) = e^{-\frac{\|x - x_0\|^2}{2\sigma^2}} e^{i\xi_0 \cdot x}, \quad (1)$$

qui dépend des trois paramètres $\sigma \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle que :

- La norme euclidienne de $x = (x_1, x_2)$ est notée $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
- La transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-\|x\|^2}$ est $\xi \mapsto \pi e^{-\|\xi\|^2/4}$
- La transformée de Fourier de $x \mapsto f(x)e^{ik \cdot x}$ est $\xi \mapsto \hat{f}(\xi - k)$

- Donner la représentation 2D de la fonction $(x_1, x_2) \mapsto |h_{\sigma, x_0, \xi_0}(x_1, x_2)|$, par exemple en dessinant quelques lignes de niveau. Où l'énergie est-elle localisée ?
- Montrer que la fonction de transfert de ce filtre s'écrit

$$\hat{h}_{\sigma, x_0, \xi_0}(\xi) = C e^{-\frac{\sigma^2}{2} \|\xi - \xi_0\|^2} e^{-ix_0 \cdot (\xi - \xi_0)}, \quad (2)$$

où C est une constante que l'on calculera.

- Représenter $|\hat{h}_{\sigma, x_0, \xi_0}(x_1, x_2)|$ dans l'espace de Fourier. Où l'énergie est-elle localisée ?
- Comment évoluent h et \hat{h} lorsque σ augmente ?
- Quel est l'avantage de ce type de filtre par rapport à un simple filtre passe-bande, de fonction de transfert

$$\hat{g}_{\sigma, \xi_0}(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2}{2} \|\xi - \xi_0\|^2} \quad (3)$$